

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Βαθμός:

Ημερομηνία: 15/03/2017

Χρόνος: 80 λεπτά

Τμήμα:

Καθηγητής: Χριστοδούλου Χ

Όνομα:

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int (e^{4x-3} + \eta\mu x) dx$

β) $\int \tau\epsilon\mu^4 x dx$

γ) $\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+4} dx$

δ) $\int_1^{e^3} \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$, $\sqrt{1+\ln x} = u$

ε) $\int \frac{10}{3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x} dx$, $t = \epsilon\varphi \frac{x}{2}$

(3+3+4+5+5=20)

2. Να βρείτε την τιμή του $\kappa > 0$ ώστε: $\int_1^\kappa \frac{x^3+7x}{x^2+5} dx + 2 \int_\kappa^1 \frac{x}{x^2+5} dx = \frac{3}{2}$.

(6)

3. Δίνονται οι καμπύλες $\psi^2 = 32x$ και $\psi = x^3$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των πιο πάνω καμπυλών.

β) Να βρείτε τον όγκο που παράγει το πιο πάνω χωρίο όταν περιστραφεί μια πλήρη στροφή γύρω από τον $\chi\chi'$.

(7+7=14)

4. Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0,1]$ και διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(0,3)$. Αν ισχύει $\int_0^1 x \cdot f''(x) dx = 0$ να αποδείξετε ότι :

α) Η εφαπτομένη της f στο σημείο $M(1, f(1))$ σχηματίζει γωνία $\frac{3\pi}{4}$ με τον $\chi\chi'$.

β) Υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f'(1)$.

(6+4=10)

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα xx' και τις ευθείες $x = 1$, $x = \alpha$, $0 < \alpha < 1$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} E(\alpha)$

(5+3=8)

6. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha - x) = f(\alpha) - f(x)$ για κάθε $x \in [0, \alpha]$.

α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \alpha - u$ να δείξετε ότι: $\int_0^\alpha f(x) dx = \frac{\alpha f(\alpha)}{2}$.

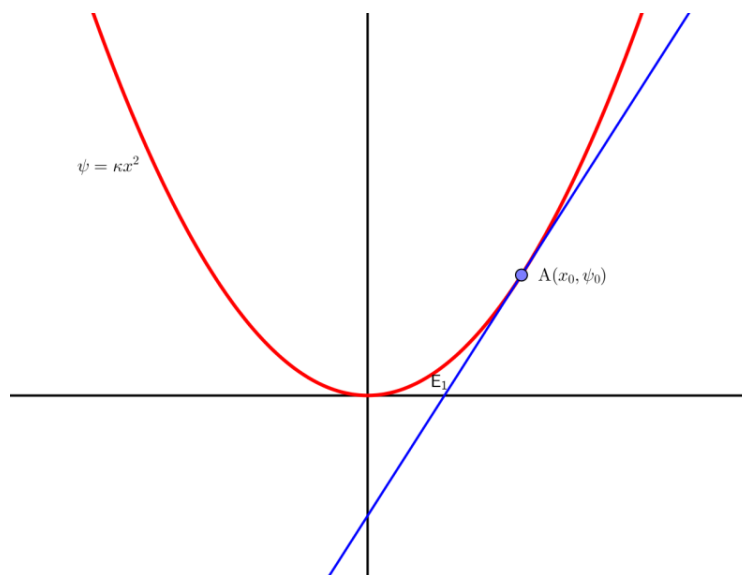
β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^{\nu} x}{\eta\mu^{\nu} x + \sigma\upsilon\nu^{\nu} x} dx$ όπου $\nu \in \mathbb{N}$.

(7+7=14)

7. α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραβολή $\psi = \kappa x^2$, $\kappa > 0$ τον άξονα xx' και την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $A(x_0, \psi_0)$, $x_0 > 0$ είναι

$$E_1 = \frac{1}{12} x_0 \psi_0.$$

β) Αν $A(\alpha, 3\alpha^2)$ είναι σημείο της πιο πάνω παραβολής και $E_1 = 16$ τ. μ. να δείξετε ότι $\alpha = 4$ και στη συνέχεια να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το E_1 στραφεί μια πλήρη στροφή γύρω από $\psi\psi'$.



(6+2+5=13)

8. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και

$$f(x) + f'(x) = 2xe^{-x}.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς μονοτονία και τα ακρότατα.

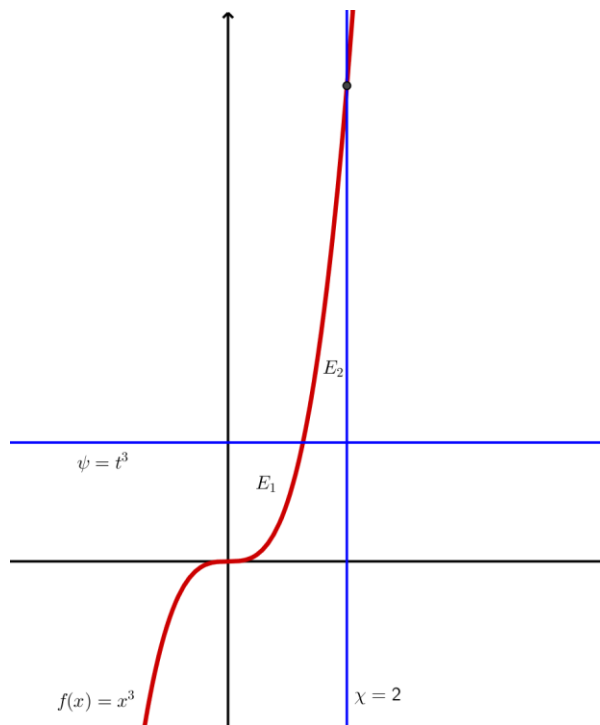
γ) Ν.δ.ο $\frac{9}{e^3} \leq \int_2^3 f(x)dx \leq \frac{4}{e^2}.$

(4+2X3=10)

9. Αν E_1 είναι το εμβαδό μεταξύ της $f(x) = x^3$ του $\psi\psi'$ και της ευθείας $\psi = t^3$, $t \in (0,2)$ και E_2 το εμβαδό μεταξύ της $f(x) = x^3$ και των ευθειών $x = 2$ και $\psi = t^3$.

α) Να δείξετε ότι $E_1 + E_2 = \frac{3}{2}t^4 - 2t^3 + 4$.

β) Αν $E(t) = E_1 + E_2$ να βρείτε για ποια τιμή του $t \in (0,2)$ το $E(t)$ γίνεται ελάχιστο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή.



(2X5=10)